Приложение 2 к РПД
Теория функций комплексной переменной
44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
направленность (профили)
Математика. Информатика
Форма обучения – очная
Год набора – 2021

ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

1. Общие сведения

1.	Кафедра	Математики, физики и информационных технологий
2.	Направление подготовки	44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)
3.	Направленность (профили)	Математика. Информатика
4.	Дисциплина (модуль)	Б1.О.05.08 Теория функций комплексной переменной
5.	Форма обучения	Очная
6.	Год набора	2021

2. Перечень компетенций

– **ОПК-8**: Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний

3. Критерии и показатели оценивания компетенций на различных этапах их формирования

<table>
<tr><th rowspan="2">Этап формирования компетенции (разделы, темы дисциплины)</th><th rowspan="2">Формируемая компетенция</th><th colspan="3">Критерии и показатели оценивания компетенций</th><th rowspan="2">Формы контроля сформированности компетенций</th></tr>
<tr><th>Знать:</th><th>Уметь:</th><th>Владеть:</th></tr>
<tr><td>Поле комплексных чисел</td><td>ОПК-8</td><td rowspan="10">основные методы доказательств теорем и утверждений комплексного анализа</td><td rowspan="10">доказывать основные теоремы и утверждения комплексного анализа, решать основные типы задач данного курса, используя при этом изученный аппарат</td><td rowspan="10">владеть основными понятиями комплексного анализа, математическим аппаратом, необходимым при изучении других дисциплин</td><td rowspan="10">Активность на занятиях, Контрольная работа №1, Контрольная работа №2, Коллоквиум</td></tr>
<tr><td>Функция комплексной переменной</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Дифференцируемость функции комплексной переменной</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Ряды с комплексными членами</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Элементарные функции комплексной переменной</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Интегрирование функций комплексной переменной</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Теория интегралов Коши</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Ряды Тейлора и Лорана</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Особые точки функции</td><td>ОПК-8</td></tr>
<tr><td>Вычет аналитической функции в особой точке</td><td>ОПК-8</td></tr>
</table>

Шкала оценивания в рамках балльно-рейтинговой системы:

«неудовлетворительно» – 60 баллов и менее; «удовлетворительно» – 61-80 баллов; «хорошо» – 81-90 баллов; «отлично» – 91-100 баллов

4. Критерии и шкалы оценивания

4.1. Активность на занятиях

Процент правильных ответов	До 60	61-80	81-90	91-100
Количество баллов за активность на занятии	0	0,15	0,25	0,37

4.2. Контрольная работа № 1

Количество правильно решенных заданий	1	2	3	4	5
Количество баллов за решенное задание	3	3	3	3	3
Итого:	15				

4.3. Контрольная работа № 2

Количество правильно решенных заданий	1	2	3	4	5
Количество баллов за решенное задание	3	3	3	3	3
Итого:	15				

4.4. Коллоквиум

Номер вопроса	1	2
Количество баллов за ответ на вопрос	10	10
Итого:	20	

5. Типовые контрольные задания и методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

1) Типовое контрольное задание

1. Дано комплексное число Z. Требуется записать число Z в алгебраической и тригонометрической формах $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$.

Решение. $z = \dfrac{2\sqrt{2}}{1+i} = \dfrac{2\sqrt{2}(1-i)}{2} = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ - алгебраическая форма,

$$|z| = \sqrt{2+2} = 2,\ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ - тригонометрическая форма.

2. Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + 5i$. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ и $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Решение. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (4 + 5i) = (2 + 4) + (-3 + 5)\, i = 6 + 2\, i$; $z_1 z_2 = (2 - 3i)(4 + 5i) =$
$= \left(2\cdot 4 + (-3)\cdot 5\cdot i^2\right) + \left(2\cdot 5 + (-3)\cdot 4\right)i = 23 - 2i$;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{(8-15)+(-12-10)i}{16+25} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i.$$

3. Вычислить $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Решение. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\dfrac{2(\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3))}{\sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))}\right)^{20} =$

$$= \frac{2^{20}}{2^{10}}\frac{e^{i\cdot 20\pi/3}}{e^{i\cdot(-5\pi)}} = 2^{10}\frac{e^{i\cdot(6\pi + 2\pi/3)}}{e^{i\cdot\pi}} = 1024\frac{e^{i\cdot 2\pi/3}}{-1} = -1024\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 512(1 - i\sqrt{3}).$$

4. 1. $f(z) = z^3$, 2. $f(z) = e^z$. Найти $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$.

Решение. 1. Выражаем z^3 через x,y: $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2 i y + 3x i^2 y^2 + i^3 y^3$

$$= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 = \left(x^3 - 3xy^2\right) + i\left(3x^2y - y^3\right) = u + iv \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = x^3 - 3xy^2, \\ v(x,y) = 3x^2y - y^3. \end{cases}$$

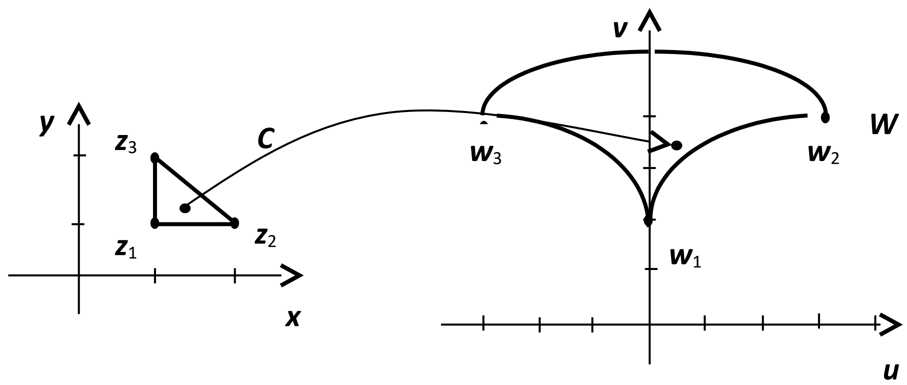
2. $w = e^z$. Здесь $u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = e^x \cos y, \\ v(x,y) = e^x \sin y. \end{cases}$

5. Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 1 + 2i$.

Найти образ треугольника $z_1z_2z_3$ при отображении $w = z^2$.

<u>Решение.</u> Находим, куда отображаются вершины треугольника. $w_1 = z_1^2 = (1 + i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$; $w_2 = z_2^2 = (2 + i)^2 = 4 + 4i - 1 = 3 + 4i$; $w_3 = z_3^2 = (1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$. Сторона z_1z_2 является частью прямой $y = y_0 = 1$. Эта прямая отображается, как мы видели, в параболу $u = \dfrac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2 = \dfrac{v^2}{4} - 1$. Нам нужна часть этой параболы между точками w_1 и w_2. Далее, сторона z_1z_3 является частью прямой $x = x_0 = 1$, отображаемой в параболу $u = x_0^2 - \dfrac{v^2}{4x_0^2} = 1 - \dfrac{v^2}{4}$; берём участок этой параболы между точками w_1 и w_3. Сторона z_2z_3 лежит на прямой $x + y = 3$; уравнение образа этой прямой получим, исключив из системы переменные x и y:

$y = 3 - x,\ u = x^2 - (3 - x)^2 = 6x - 9 \Rightarrow x = \dfrac{u+9}{6} \Rightarrow v = 2 \cdot \dfrac{u+9}{6}\left(3 - \dfrac{u+9}{6}\right) = \dfrac{9}{2} - \dfrac{u^2}{18}$. Участок этой параболы между точками w_2 и w_3 и даст образ стороны z_2z_3. Изображение треугольника построено. Легко убедиться, что область, ограниченная этим треугольником, переходит во внутренность криволинейного треугольника $w_1w_2w_3$ (для этого достаточно найти, например, образ одной точки этой области).



6. Проверить выполнение условий Коши - Римана и найти $f'(z)$: а) $f(z) = z^2$, б) $f(z) = e^z$

<u>Решение.</u> 1. Проверим, что для функции $f(z) = z^2$ выполняются условия Коши-Римана. Так как $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, то $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Тогда

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2x + i \cdot 2y = 2(x + iy) = 2z$.

2. Для функции $w = e^z$ мы получили $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Поэтому

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, т.е. функция дифференцируема.

$f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y = e^x(\cos y + i \cdot \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$.

7. Может ли функция $v(x, y) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x)$ быть мнимой частью некоторой аналитической функции $w = f(z)$? В случае положительного ответа найти функцию $w = f(z)$.

<u>Решение.</u> Докажем, что $v(x, y)$ - гармоническая функция.

$v'_x = e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x)$; $v''_{xx} = e^{-y}(-\sin x - \sin x - x\cos x + y\sin x) = e^{-y}(-2\sin x - x\cos x + y\sin x)$;

$v'_y = -e^{-y}(x\cos x - y\sin x + \sin x)$; $v''_{yy} = e^{-y}(x\cos x - y\sin x + \sin x + \sin x) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x + 2\sin x)$;

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$, т.е. $v(x, y)$ - гармоническая функция и, следовательно, может являться мнимой частью аналитической функции.

Найдём эту функцию. Для действительной части $u(x, y)$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y}(x\cos x - y\sin x + \sin x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x); \end{cases} \Rightarrow u = -e^{-y}\int (x\cos x - y\sin x + \sin x)dx = -e^{-y}\int x\cdot d\sin x -$$

$$-e^{-y}\cdot y\cos x + e^{-y}\cos x = -e^{-y}\cdot x\sin x + e^{-y}\int \sin x dx -$$

$$-e^{-y}\cdot y\cos x + e^{-y}\cos x = -e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + \varphi(y),$$

для нахождения $\varphi(y)$ используем второе уравнение системы:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + \varphi(y)\right] = e^{-y}(x\sin x + y\cos x - \cos x) + \varphi'(y) = -e^{-y}(\cos x - x\sin x - y\cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = C = \mathrm{const}.$$

Формально мы можем выписать

$w = f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y) = e^{-y}[-(x\sin x + y\cos x) + i(x\cos x - y\sin x)] + C$, но толку в этой записи нет, так как не видна зависимость f от z. Поэтому сделаем по-другому. Выпишем производную $f'(z)$:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y}\left[(x\cos x - y\sin x + \sin x) - i(\cos x - x\sin x - y\cos x)\right].$$

На действительной оси (при $y = 0$, т.е при $z = x$) функция $w = f(z)$ превращается в функцию действительной переменной $f(x)$, её производная - в $f'(x)$. Положим в $f'(z)$ $y = 0$, $x = z$:

$$f'(z)\big|_{y=0;\, z=x} = -e^{-y}\left[(x\cos x - y\sin x + \sin x) - i(\cos x - x\sin x - y\cos x)\right]\big|_{y=0;\, z=x} =$$

$= -z\cos z - \sin z + i(\cos z - z\sin z)$; проинтегрировав это выражение, получим $f(z)$.

Техника нахождения неопределённых интегралов в теории функций комплексной переменной в основном та же, что и в математическом анализе; таблица основных интегралов в обоих случаях одинакова, поскольку одинакова таблица производных. Поэтому

$$f(z) = -\int z\cos z dz - \int \sin z dz + i\int \cos z dz - i\int z\sin z dz = -\int z d(\sin z) + \cos z + i\sin z + i\int z d(\cos z) =$$

$$= -z\sin z + \int \sin z dz + \cos z + i\sin z + iz\cos z - i\int \cos z dz = -z\sin z - \cos z + \cos z + i\sin z + iz\cos z -$$

$-i\sin z + C = -z\sin z + iz\cos z + C = iz(\cos z + i\sin z) + C = iz\, e^{iz} + C$, где C – произвольная вещественная постоянная интегрирования. Постоянная интегрирования будет действительной, если по условию задачи задана функция $v(x, y)$, и с точностью до произвольной постоянной находится действительная часть $u(x, y)$ функции $f(z)$; если же задана функция $u(x, y)$, то с точностью до произвольной постоянной интегрирования находится мнимая часть $v(x, y)$, т.е постоянная будет чисто мнимым числом Ci (C - произвольное вещественное число).

Проверим полученный результат. Если $f(z) = iz\, e^{iz} + C$, то $f(z) = (ix - y)\, e^{(ix-y)} + C =$
$= e^{-y}(ix - y)(\cos x + i\sin x) + C = i\, e^{-y} x\cos x - e^{-y} x\sin x - e^{-y} y\cos x - i\, e^{-y} y\sin x + C =$

$$\underbrace{-e^{-y}(x\sin x + y\cos x) + C}_{u(x,y)} + i\cdot \underbrace{e^{-y}(x\cos x - y\sin x)}_{v(x,y)\ -\ \text{по условию}};$$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y}(\sin x + x\cos x - y\sin x) = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^{-y}(x\sin x + y\cos x - \cos x) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$; условия Коши-Римана выполнены, следовательно, функция $f(z) = iz\, e^{iz} + C$ - аналитическая на всей комплексной плоскости функция.

3) Вопросы к зачету

1. Понятие интеграла по комплексному переменному. Формулы для вычисления.
2. Оновные свойства интеграла по комплексному переменному. Интегрирование равномерно сходящегося ряда.
3. Теорема Коши (с предположением о непрерывности производной функции).
4. Основная лемма.
5. Теорема Коши (предполагающая существование лишь конечной производной).
6. Распространение теоремы Коши на случай сложных контуров.
7. Понятие неопределенного интеграла в комплексной области.
8. Интегральная формула Коши (случай односвязной области).
9. Интегральная формула Коши (случай многосвязной области).
10. Интеграл типа Коши.
11. Существование производных всех порядков для функции аналитической в области. Теорема Морера.
12. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций. Первая теорема Вейерштрасса.
13. Ряд Тейлора.
14. Разложение аналитической функции в степенной ряд.
15. Понятие голоморфной функции и его эквивалентность с понятием аналитической функции.
16. Теорема единственности аналитических функций.
17. Нули аналитической функции.
18. Неравества Коши для коэффициентов степенного ряда. Теорема Лиувилля. Вторая теорема Вейерштрасса.
19. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Единственность разложения Лорана.
20. Классификация изолированных особых точек.
21. Теорема Сохоцкого.
22. Поведение аналитической функции на бесконечности.
23. Вычет функции относительно изолированной особой точки. Основная теорема о вычетах.
24. Вычисление вычета относительно полюса.
25. Вычет функции относительно бесконечно удаленной точки.
26. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов.